Contenido

[1. Diferencial de una función 2](#_Toc148611651)

[1.1. Aproximación de Δy con la diferencial 3](#_Toc148611652)

[1.2. Extensión de la definición de diferencial a n variables 3](#_Toc148611653)

[2. Diferenciabilidad de una función 3](#_Toc148611654)

[2.1. Condiciones necesarias de diferenciabilidad 3](#_Toc148611655)

[2.2. Condición suficiente de derivabilidad 4](#_Toc148611656)

**Derivabilidad y diferenciabilidad**

# Diferencial de una función

Sea una función f(x) y x0, un punto cualquiera de la función. A continuación, se avanza en el sentido positivo del eje x y se escoge otro punto genérico x de tal modo que podemos definir:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

A continuación, por el punto x0 se hace pasar una recta tangente a la función f(x), de modo que se pude definir el triángulo rectángulo que se puede ver en color verde en la figura de abajo. Se define:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

Como habíamos visto en la interpretación geométrica, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, por tanto:

A dy simplemente la llamados diferencial de f y su definición se obtiene de despejar dy en la ecuación anterior:

## Aproximación de Δy con la diferencial

Como puede deducirse de la observación de la gráfica de arriba cuando Δx es muy pequeño la gráfica y la tangente están muy juntas y Δy y dy son prácticamente iguales. Teóricamente podemos decir que:

Es decir, para valores Δy suficientemente pequeños Δy≈dy, por lo que podríamos escribir la siguiente ecuación:

## Extensión de la definición de diferencial a n variables

Del mismo modo que se definió la diferencial de una variable, ahora se puede definir la diferencial en n variables. En particular para 2 variables, la diferencial quedaría así:

# Diferenciabilidad de una función

Una función de 2 variables es diferenciable si se cumple la afirmación:

Esta afirmación ya se había visto en el apartado 1.1 en la página 2 pero referida a funciones de una variable. En la práctica esta afirmación da lugar a una ecuación y teóricamente se podría usar esa ecuación para determinar la diferenciabilidad, pero en la práctica ese cálculo se suele complicar bastante por lo que para facilitar la determinación de la diferenciabilidad se usan una serie de teoremas que se van a ver a continuación.

## Condiciones necesarias de diferenciabilidad

* Condición necesaria de la continuidad: si f es diferenciable 🡪 f es continua.

¿Por qué es condición necesaria? ¿Cómo ayuda esto a resolver ejercicios?

La condición es necesaria, porque es necesario que la función sea continua para que sea diferenciable. En la práctica para resolver ejercicios, se usa al revés y negada:

**Si f no es continua 🡪 no es diferenciable**

¡Cuidado!. Que la condición solo sea necesaria y no suficiente significa que f puede ser continua y aún así no ser diferenciable, como por ejemplo la función f(x)=|x|, cuya gráfica se puede ver a continuación

Gráfico, Gráfico de líneas

Descripción generada automáticamente

* Condición necesaria de la existencia de las derivadas parciales: si f es diferenciable 🡪 existen todas las derivadas parciales.

¿Por qué es condición necesaria? ¿Cómo ayuda esto a resolver ejercicios?

La condición es necesaria, porque es necesario que existan las derivadas parciales para que la función sea diferenciable. En la práctica para resolver ejercicios también se usa al revés y negada:

**Si las derivadas parciales no existen 🡪 no es diferenciable**

¡Cuidado!. Que la condición solo sea necesaria y no suficiente significa que las derivadas parciales pueden existir y aún así no ser diferenciable.

## Condición suficiente de diferenciabilidad

Si existen las derivadas parciales y son continuas, entonces f es derivable.

¿Por qué es condición suficiente? ¿Cómo ayuda esto a resolver ejercicios?

Es condición suficiente porque es suficiente que las derivadas parciales sean continuas para que la función sea diferenciable. Sin embargo, al no ser condición necesaria, no es necesario que las derivadas parciales sean continuas para que la función sea diferenciable; por lo que podemos encontrar funciones que sean diferenciables pero que sus derivadas parciales no sean continuas.

En este caso para resolver los ejercicios se usará la condición tal cual se ha enunciado:

**Si las derivadas parciales son continuas** 🡪 **diferenciable**